



<i>Presentation Title</i>	教學設計：不一樣的圓
<i>Format</i>	Paper Session [4.02]
<i>Sub-theme</i>	Teaching and Education Innovation

教學設計：不一樣的圓

蕭穎翹

香港教育學院小學教育榮譽學士課程

關樹培

香港教育學院數學與資訊科技學系

摘要

我們是香港教育學院的師生，深信數學教育除了建立基本知識，亦著重發展學生的探究、傳意、推理、構思和解決問題等能力。本文運用我們研討過的學習單元知識，以小學六年級數學科“圓的認識”為題，嘗試透過「整合技術的學科教學法知識」(TPCK—Technological Pedagogical Content Knowledge)設計兩教節有關此課題的教學活動。

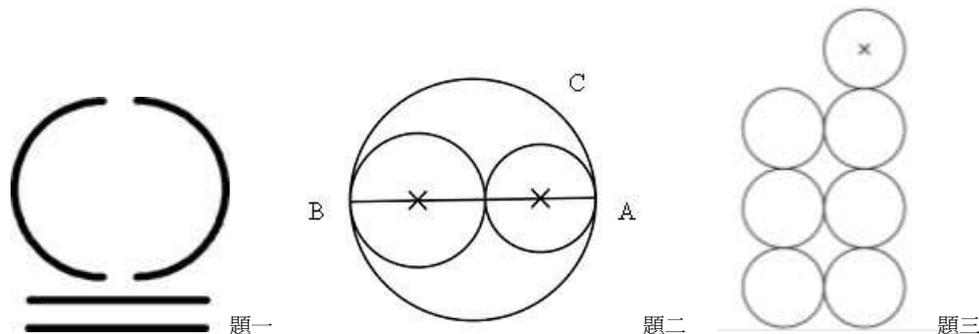
Keywords: Mathematics Education, TPCK, Creative Problem Solving (CPS)

「整合技術的學科教學法知識」的理念源於舒爾曼(Lee S. Shulman)的「學科教學知識」(PCK – Pedagogical Content Knowledge)(任一明、田騰飛，2009，134-138)。舒爾曼針對教師學科知識與教學知識分離的弊端，在 1986 年提出了「學科教學知識」，將學科知識與教學知識結合起來，根據學生的能力，把學科知識轉化為容易被學生理解和接受的教學內容。基於現今資訊科技一日千里，TPACK 代表著教師能夠根據具體教學情景的需要，綜合考慮學科知識、教學方法和技術支援，設計恰當的教學方案(陳靜，2009，29-32)。

國內的學者說得好：「學起於思，思源於疑」，學生心中有疑問就很自然會去思考，因此教學設計是以解決問題作起步點。而解決問題又是數學教育裡重要的一環，與我們的生活息息相關，其中的開放式難題更涉及擴散性思維的培育。

這兩教節是學生學習了“圓的認識”的基本概念後的鞏固課節，即學生已認識圓的特性及圓心、弦、半徑、直徑和圓周；能用不同的方法作圓；有周界的概念等；但學生尚未認識圓周率、圓周及圓面積的計算方法。課節圍繞著三道數學問題進行：

題一 **等周圖形**：給予一些線段(圓周的部份及直徑)，利用此等線段組成不同的等周圖形(即周界相同的圖形)。



題二 **圓內圓**：給予三個大小不一的圓，小(A)、中(B)、大(C)，他們的直徑關係是 A 圓的直徑 + B 圓的直徑 = C 圓的直徑。那麼你能猜到他們的圓周關係嗎？

題三 **平分七圓**：有七個相等的圓，依照上圖排列。已經知道 x 是最上面那個圓的圓心。現在要通過 x 點作一條直線，把七個圓的面積分成相等的兩部分。你怎麼辦？(劉佳琦，2007，5)

本文以第二題(圓內圓)為例，討論「整合技術的學科教學法知識」內的學科知識，教學知識及科技知識。

我們從數理分析開始。大圓 O 的周界 $C = 2\pi R$ (C:周界, R:半徑)

各小圓的周界:

$$C_1 = 2\pi r_1$$

$$C_2 = 2\pi r_2$$

$$C_3 = 2\pi r_3$$

⋮

$$C_n = 2\pi r_n$$

小圓的周界總和:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

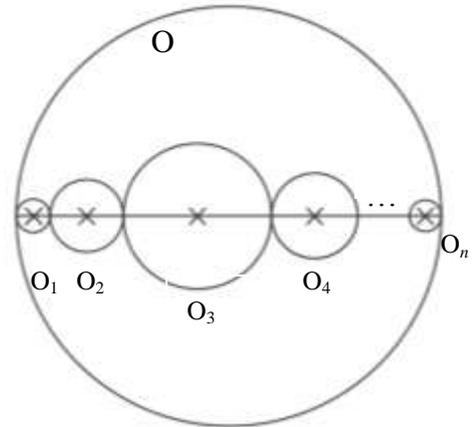
$$= 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 2\pi r_3 + \dots + 2\pi r_n$$

$$= 2\pi (r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n)$$

$$= 2\pi R$$

$$= C \quad (\because R = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n)$$

所以各小圓的周界之和等於大圓的周界。



若把問題中的圓形改換為正方形，而小正方形排列於大正方形的對角線上，各小正方形的周界之和等於大正方形的周界嗎？

大正方形的周界 $P = 4l$ (l:邊長)

各小正方形的周界:

$$P_1 = 4l_1$$

$$P_2 = 4l_2$$

$$P_3 = 4l_3$$

⋮

$$P_n = 4l_n$$

小正方形的周界總和:

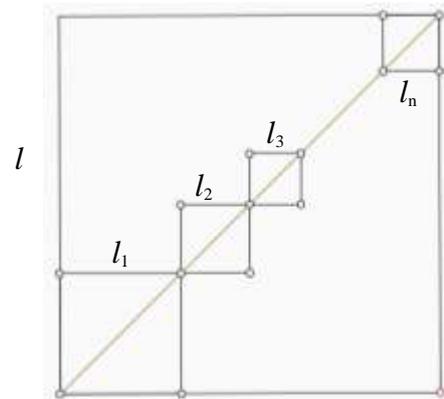
$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

$$= 4l_1 + 4l_2 + 4l_3 + \dots + 4l_n$$

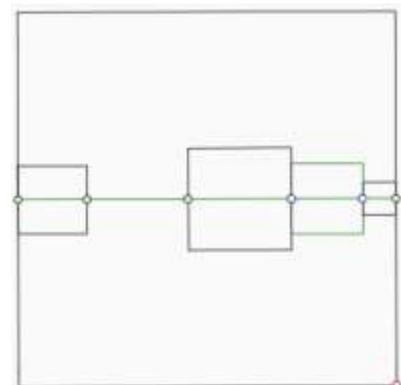
$$= 4(l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n)$$

$$= 4l \quad (\because l = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n)$$

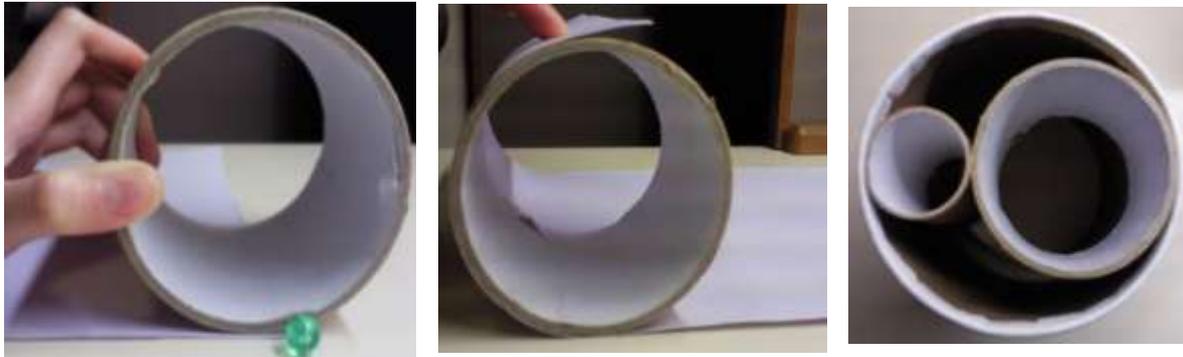
所以各小正方形的周界之和等於大正方形的周界。



若把小正方形排列於大正方形的一對對邊的中點連線上，各小正方形的周界之和仍等於大正方形的周界嗎？如果進一步我們把以上的排列情況再變換為矩形及平行四邊形，結論還是一樣嗎？我們又可以把平面圖形遞推到立體圖形上嗎？應怎樣概推呢？我們把以上問題的答案和分析留給讀者思考好了。



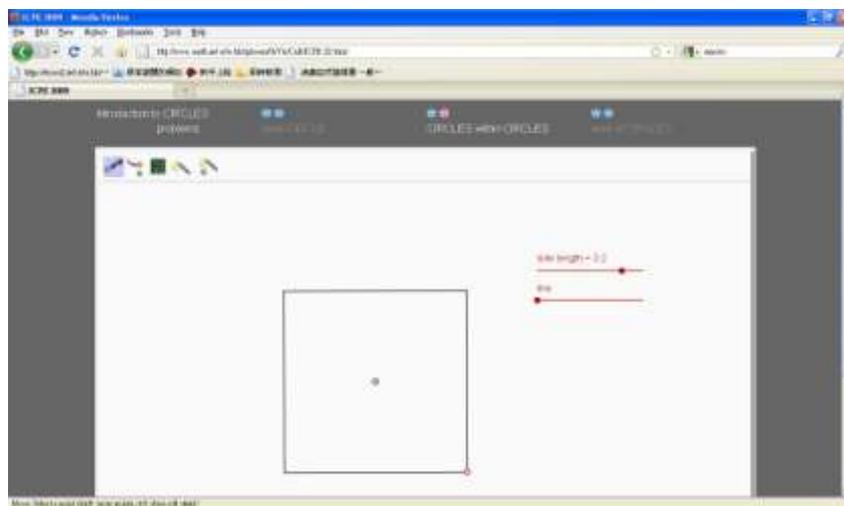
由於學生尚未學習圓周率及圓周的計算方法，以上的分析旨為教師提供穩固的設計基礎。在實際教學方面，實物操作對學生來說是具體的，且為「從做中學」提供合適學習環境。我們發現桂格麥片筒、大小廁紙筒是理想的學具。學生可以利用以往學過的量度方法，例如利用軟尺量度，去直接量度求解，而教師則可以向學生展示量度過程(把圓紙筒在紙上轉整數周並畫下記號，如下圖)。



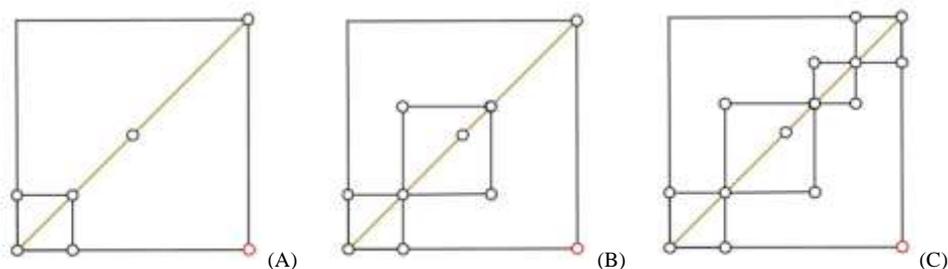
工作紙是引導學生進行解題的好幫手。有效的設計能領學生由淺入深逐步進行探究。附件的工作紙先要求學生作基本的量度及觀察，再增加問題的難度，並且加入延伸問題。

實物操作亦有其局限性。量度圓周需時，而且還有學具不足的問題。於這方面，動態幾何軟件 C.a.R. 能提供虛擬的動畫顯示，有助教師教學。我們為這三道數題設計了與工作紙配合使用的教學軟件，有興趣的讀者可瀏覽以下網址：
[http://www.math.ied.edu.hk/spkwan/JAVA/CaR/introduction to circles.htm](http://www.math.ied.edu.hk/spkwan/JAVA/CaR/introduction%20to%20circles.htm)。

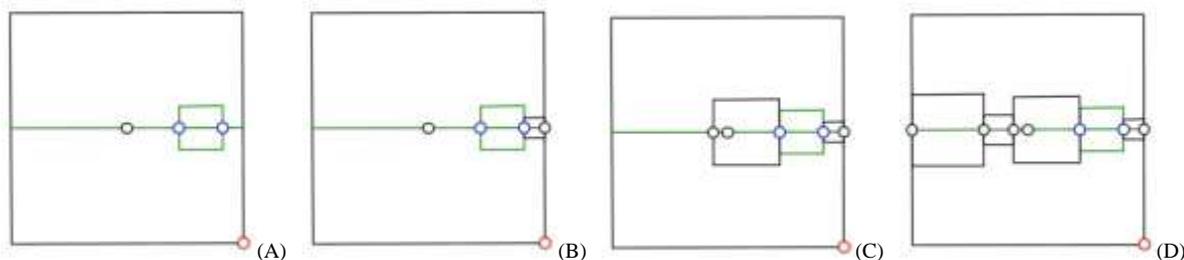
由於“圓內圓(Circles within Circle)”這部份寫入了巨集(Macros)，以下是讀者應用網上軟件繪製題目的使用方法。當進入下面版面後，無論是小正方形排列於大正方形的對角線上或小正方形排列於大正方形的一對對邊的中點連線上，讀者都可依循隨後的步驟繪製小正方形。



- 先指向“clue”線上的紅點，並且向右邊移動，直至出現小正方形(及對角線)。
- 按著小正方形的右邊圓點，拖曳到右邊緊貼著大正方形。
- 隨後按右鍵，按需要選“square”或“square 2”。
- 然後依次序先輕點大正方形的中心點，再點大正方形右下角的紅點，隨著你心意點出小正方形的左方，之後便可向左拉出新的小正方形。



小正方形排列於大正方形的對角線上



小正方形排列於大正方形的一對對邊的中點連線上

伴隨現代教育環境技術化的程度不斷提高，人們對教師的科技知識有更高的要求，教師必須將新技術納入自身的專業知識結構之中，才能勝任現今教育環境下的教學工作。

爲了設計出更好的教學方案，教師必須把資訊科技與學科內容、教學方法結合起來統籌考慮，將教育理論、學習理論貫穿於設計過程之中。誠如李美鳳和李藝（2008，76）指出——教師對技術的深刻理解，對自己原有的教學觀念、教學方法的重新審視與反思，敏銳地在科學技術、學科知識與教學方法的相互關係中尋求新的可能，利用新技術開創新的教學空間。

最後我們以擺放案頭的座右銘《一本師心》中的話作結：先進的教材或教學方法是重要的，而更重要的是使用這些東西的學生與教師。

參考資料：

- 1) 任一明、田騰飛(2009)：PCK－教師教育改革之必需，《西南大學學報》2，134-138頁，西南大學。
- 2) 李美鳳、李藝(2008)：TPCK:整合技術的教師專業知識新框架，《南京師範大學教育科學學院》4，74-77頁，南京師範大學。
- 3) 陳靜(2009)：整合技術的學科教學法知識視閾下教師的教育技術能力培養，《西南大學外國語學院》6，29-32頁，西南大學。
- 4) 劉佳琦(2007)：《神奇數學6年級》，1-14頁，浙江少年兒童出版社。
- 5) 姚惠瑜、陳麗萍(2008)：數學化教學：圓的認識，《數學教育》26，50-57頁，香港數學教育學會。

附錄：工作紙

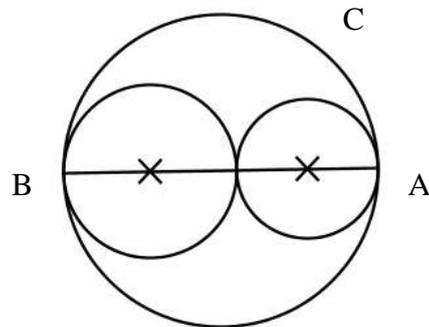
圓的認識：圓內圓

- 1) 給予三個大小不一的紙筒，小(A)、中(B)、大(C)三個圓分別為他們的橫切面(如右圖所示)，請同學利用學過的方法，分別量度他們的直徑。

A 圓的直徑_____ cm

B 圓的直徑_____ cm

C 圓的直徑_____ cm



直徑的關係：____圓的直徑 + ____圓的直徑 = ____圓的直徑。

那麼你能猜到他們的圓周關係嗎？

老師以實物示範量度他們的圓周，你們則以軟尺作量度，並且觀察他們的關係。

A 圓的圓周_____ cm

B 圓的圓周_____ cm

C 圓的圓周_____ cm

圓周的關係：____圓的圓周 + ____圓的圓周 = ____圓的圓周。

- 2) 若大圓(D)內有三個圓(如右圖所示)，而三個圓的直徑之和等於大圓的直徑。你能猜到他們的圓周關係嗎？

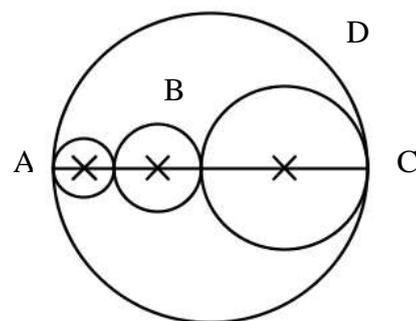
以軟尺作量度，並且觀察他們的關係。

A 圓的圓周_____ cm

B 圓的圓周_____ cm

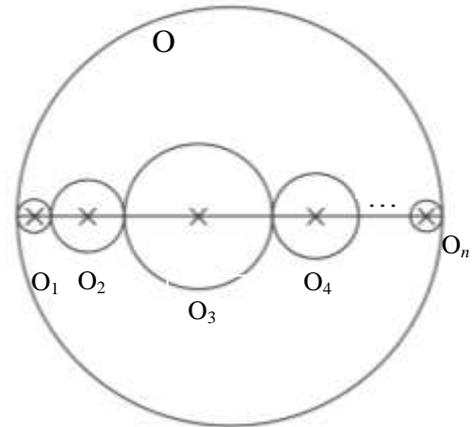
C 圓的圓周_____ cm

D 圓的圓周_____ cm

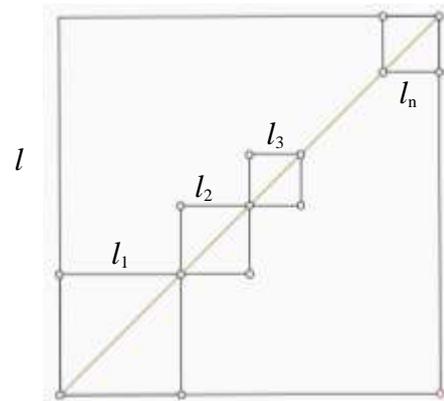


延伸問題：

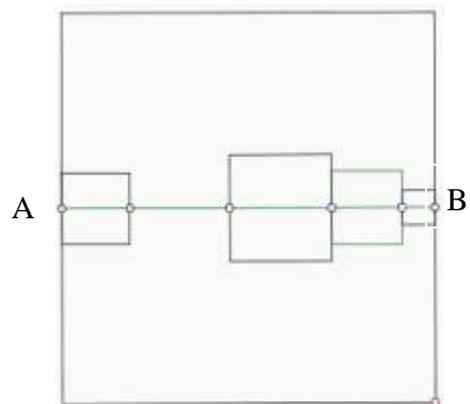
- 3) 若大圓內有 n 個圓(n 為自然數)(如右圖所示), 而 n 個圓的直徑之和等於大圓的直徑。你能猜到他們的圓周關係嗎？



- 4) 若把問題中的圓形改換為正方形(如右圖所示), 小正方形排列於大正方形的對角線上, 各小正方形的周界之和等於大正方形的周界嗎？



- 5) 若小正方形排列於 AB 之上(如右圖所示), 各小正方形的周界之和等於大正方形的周界嗎？(提示：留意他們之間長和闊的關係)



作者

蕭穎翹

香港教育學院 小學教育榮譽學士課程

Email: wingkiu118@yahoo.com.hk

關樹培

香港教育學院 數學與資訊科技學系

Email: spkwan@ied.edu.hk