



<i>Presentation Title</i>	正方體的展開圖、截面與學生的空間感培養
<i>Format</i>	Paper Session [ 2.02 ]
<i>Sub-theme</i>	Curriculum Development and Innovation by Schools and Teachers

## 正方體的展開圖、截面與學生的空間感培養

羅家欣

香港教育學院學位教師教育文憑（小學）課程

關樹培

香港教育學院數學與資訊科技學系

### 摘要

圖形與空間的教學相對於其他範疇來說計算式的練習較少，經常被忽略，得不到應有的重視。這些題材的教學效果，很視乎教師能否安排有效的學習活動來讓學生在實作中建構知識。空間感的建立，尤其是幾何的概念和性質，都必須透過操作和實際體驗來掌握。


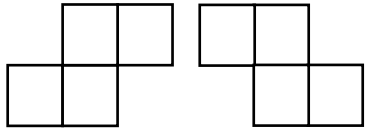
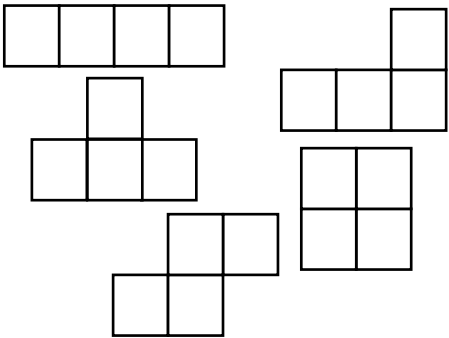
本文與讀者分享一次嘗試教學的經驗。我們以「正方體的展開圖」為題，設計並推出一連串的教學活動。從四／五個正方形的拼砌開始，逐步引導學生發現正方體的展開圖樣，配上一些富探究性的問題和故事，啟發學生的思考，再領學生發現一些三角形的拼砌圖形，是正方體被分割部份的展開圖，最後引進截面的學習。教學焦點集中在「空間觀念」由粗疏到精密的改變，我們最關心的是學生空間想像力的提升過程。



**Keywords:** Mathematics Education, Nets of a Cube, Cross Sections of a Cube

圖形與空間的教學相對於其他範疇來說計算式的練習較少，經常被忽略，得不到應有的重視。這些題材的教學效果，很視乎教師能否安排有效的學習活動來讓學生在實作中建構知識。空間感的建立，尤其是幾何的概念和性質，都必須透過操作和實際體驗來掌握。

本文與讀者分享兩次的校本設計及嘗試教學。去年度(2008-09 學年)我們以「正方體的展開圖」為題，推行一連串的教學活動。從正方形的拼砌開始，逐步引導學生發現正方體的展開圖樣，配上一些富探究性的問題和故事，啟發學生的思考。

五年級 (2008-09 年度)

重點	教學內容	學生活動
第一至四節		
介紹「聯方圖形」	示範三張小手工紙可拼出不同的聯方圖形，並討論其特徵。	<ul style="list-style-type: none"> <li>利用三張小手工紙來拼砌。</li> </ul>
分辨相同/不同的圖樣	與學生討論何謂相同/不同的圖樣。利用教具來驗證學生的答案，以鞏固他們對圖形旋轉/反轉後能重疊的概念。 	<ul style="list-style-type: none"> <li>例：以下的圖樣應否視為不同的圖樣？為什麼？</li> </ul> <div style="text-align: center;">  </div> <p>它們是相同的，因為若把其中一圖樣反轉，便可和另一圖樣重疊。</p>
拼砌「四方塊」	協助學生找出圖形的變化規律。利用四個正方形，共可拼出五個不同的圖樣。學生用四個正方形拼出不同的聯方圖形(邊貼邊)，並把圖形記錄在方格紙上。讓學生討論拼砌圖形的技巧及規律，並看誰找得最多不同的拼法。	<ul style="list-style-type: none"> <li>引導學生拼出不同的圖樣。</li> </ul> <div style="text-align: center;">  </div>
拼砌「五方塊」	以相同的手法與學生討論窮盡圖樣的方法。老師展示十二個不同的圖樣，並協助學生找出圖形的變化規律。	




介紹「摺紙圖樣」無蓋正方體盒的紙樣	<p>教師拆開正方體，並介紹「摺紙圖樣」的意義。</p> <p>討論「摺紙圖樣」的非唯一性。</p> <p>從拼砌出的圖樣中，找出哪些圖樣能摺成無蓋的正方體盒。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>學生可把繪畫的圖樣剪出，測試哪些能摺合成無蓋的盒。</li> </ul>
正方體盒的紙樣	<p>把問題延伸至正方體盒的摺紙圖樣。</p> <p>教師引導學生發現可以摺成正方體的摺紙圖樣，必須由 6 個正方形組成，但不是所有由 6 個正方形組成的摺紙圖樣都能夠摺成正方體。</p> <p>然後指導學生以合作學習方式進行活動。(見左方)</p> <p>之後與學生回顧活動的心得。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>給每組派發摺不同紙圖樣。著學生判斷哪些摺紙圖樣可以摺成正方體。</li> <li>各組匯報結果。並把摺紙圖樣分兩欄貼在黑板上。(先分辨)</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>教師與學生討論怎樣把✕欄的摺紙圖樣修改，才可摺成正方體。</li> <li>著學生把摺紙圖樣修改和剪出，測試摺紙圖樣能否摺成一個正方體。(後驗證)</li> </ul> 
正方體紙樣的數目	<p>訪問學生如何找出答案。讚賞自製正方體摺紙圖樣的學生，並鼓勵學生逐漸擺脫實物操作。讚賞能運用心像做設計的學生，並著他們向同學分享其心得。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>每組派發一張圖畫紙和 18 張小手工紙，同學分工合作設計能夠摺合成正方體的摺紙圖樣。(要求與之前討論的沒有重覆)</li> <li>展示成果，互評各組別的作品。</li> </ul>

<p>正方體紙樣的規律</p>	<p>引導學生從展開圖最長的一串直線相連正方形的個數 6 開始思考，並檢示其中規律。</p>	
<p>課後延續</p>	<p>老師把十一個正方形開展圖的動畫展示和有關的練習放在 eclass，讓學生在家中自學和鞏固學習。</p>	
<p>家課練習</p>	<p>著學生回家利用十一個正方體摺紙圖樣，找出哪些邊要連接在一起，把相連的邊填上相同的顏色/英文字母。然後再利用數字表示各組相對的面。</p>	
<p>第五至七節</p>		
<p>「對面」與「鄰面」</p>	<p>與學生討論對面與鄰面於紙樣上的相應位置。</p>	
<p>挑戰題</p>	<p>老師利用《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》199 頁內的題目來考考學生對正方體摺紙圖樣的理解程度。</p>	
<p>《齊來破奇案》</p>	<p>老師講述故事。內容是有關一個劫匪拿着一個正方體的箱到銀行打劫。劫匪逃去後，把正方體的箱拆開，並不斷轉換不同的正方體摺紙圖樣，以躲避警方追捕。老師請同學一起幫警方破案。(故事請參閱附錄。)</p>	
 <p>老師一邊講述，一邊提問學生。這樣一方面能吸引學生的注意，又能確保學生明白故事的發展。</p>		 <p>老師亦就故事的發展著學生討論相關的問題，並匯報討論的結果。</p>

	 <p>在比較淺易的問題，鼓勵學生憑空想像。 於比較深奧的問題，老師提供教具予學生幫助思考。</p>	 <p>破案了！</p>
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------

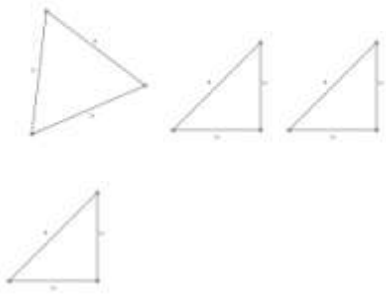
本年度學生升上六年級，需要學習立體圖形及其截面。我們如何帶領學生從去年所學步進新的學習課題？如何更緊密地從展開圖帶出截面？筆者就這銜接部份作以下的設計。我們加入一些三角形的拼砌圖形，指導學生發現其中一些是正方體被分割後的展開圖，最後引進截面的學習。

六年級(2009-10 年度)

重點	教學內容	學生活動
第一至第四教節		
<p>等邊三角形的拼砌</p>	<p>重溫正方體的紙樣。 展示一個等邊三角形。提問學生若有四個相同的圖形，可拼砌成一個怎樣的立體圖形。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>派發四塊等邊三角形讓學生拼砌。並鼓勵學生先把想像出的立體圖形說出來。(正四面體)</li> </ul> 
<p>等腰直角三角形的拼砌</p>	<p>展示一個等腰直角三角形。提問學生若有四個相同的圖形，可拼砌成一個怎樣的立體圖形。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>派發四塊等腰直角三角形(手工紙)讓學生拼砌。鼓勵學生先估計，然後再實踐拼砌。(不能成功拼砌)著學生解釋不能成功拼砌立體圖形的原因，並帶出不是所有相同的圖形皆可拼砌成一立體圖形。</li> </ul>

一個等邊三角形和三個等腰直角三角形的拼砌

展示一個等邊三角形和三個等腰直角三角形。提問學生可拼砌成一個怎樣的立體圖形。

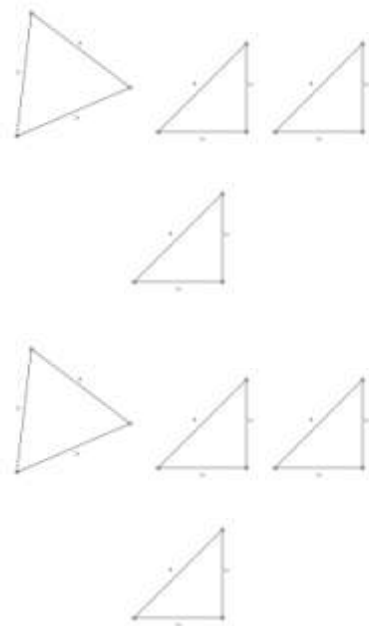


- 派發一個等邊三角形和三個等腰直角三角形(手工紙)讓學生拼砌。鼓勵學生先估計，後實踐拼砌。(三角錐體)  
教師與學生分工合作設計能夠摺合成三角錐體的摺紙圖樣。



兩個等邊三角形和六個等腰直角三角形的拼砌 (ck-八面體的拼砌)

展示兩個等邊三角形和六個等腰直角三角形。提問學生可拼砌成一個怎樣的立體圖形。



- 派發兩個等邊三角形和六個等腰直角三角形讓學生拼砌。鼓勵學生先估計，後實踐拼砌。(ck-八面體)  
老師可因應學生的能力作出適當的提示。下圖是一些合理的摺紙圖樣。

		 
<p>比較ck-八面體和相應正方體的體積</p>	<p>拼湊成 ck-八面體後，老師派發一個正方體，著學生猜猜哪一個立體的體積較大。</p> <p>著學生估計它們的比例。</p> <p>提問學生如何驗證他們的猜想。</p> <p>(老師接受一切可行的答案)</p> <p>老師派發彩沙(鹽)、漏斗、ck-八面體(用紙摺的)和正方體(用紙摺的)。著學生嘗試利用以上的工具驗證他們的猜想。</p> <p>(老師接受一切可行的方案)</p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>學生利用給予的物品找出解答問題的方法。</li> </ul>   <p>老師提問學生 ck-八面體的體積是正方體的幾分之幾？(2/3)</p>
<p>利用摺紙模型來拼砌和觀察ck-八面體和正方體的關係</p>	<p>老師解說 ck-八面體是相應正方體的一部份。</p> <p>老師示範將 ck-八面體放進正方體，並著學生說出如何從正方體切出ck-八面體。</p> <p>老師帶出截面的概念。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>學生利用摺紙模型來驗證結果。</li> </ul>

<p>認識正方體的截面</p>	<p>老師提問學生從正方體切出 ck-八面體，被切除的部份是兩個怎樣的立體?(三角錐體)</p> <p>老師追問那兩個三角錐體有何特徵。(皆是由一個原來的等邊三角形和三個原來的等腰直角三角形組成)</p> <p>老師派發 ck-八面體、兩個等邊三角形和六個等腰直角三角形，著學生驗證結果。</p>	
<p>利用「紅酒實驗」來觀察正方體的截面</p>	<p>老師解說：除了摺紙，我們也可以利用水平面來觀察正方體的截面。老師介紹「紅酒實驗」。</p> <p>老師著學生利用空心的正立體和顏色水來帶領學生一同製作不同的截面。</p> <p>技巧：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 利用顏色水來讓學生看得較清楚。</li> <li>• 用手指控制立體的出水孔的大小，從而控制水流的快慢。</li> <li>• 著學生在工作紙上紀錄。</li> <li>• 老師利用實物投影器來展示學生所紀錄的截面，並給予回饋。</li> </ul> <p>提問學生正方體還有其他截面嗎?(學生自由作答)</p> <p>截面的形狀受甚麼影響?</p> <p>學生用工作紙紀錄不同形狀的截面，並與同學一起分享。(可有三角形、四邊形、五邊形和六邊形)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 進行「紅酒實驗」。</li> </ul>  

經過這兩次的嘗試教學，我們又想起早在二、三年級，學生已接觸過七巧板，而七巧板的一些探究的活動，又可以很自然地連繫到聯方圖形的學習，使學生從初小至高小的幾何學習，構成一緊密而有聯繫的知識。可惜我們的意念尚待落實執行，且篇幅所限，這裡不作詳述，日後冀能有機會與大家分享。

從設計到教學，我們再一次深刻體會到良好的教與學，既是學科知識與教學知識的融會，且是一個極富創造思維的過程。



## 參考資料

1. 馮振業 (2009)，正方體的截面，載於《數學教育 第二十八期》，20–31 頁，香港：香港數學教育學會。
2. 馮振業、葉嘉慧 (2007)，數學化教學：空間觀感的培養，載於吳丹(編)，《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》，188–199 頁，香港：香港數學教育學會。
3. 黃敏晃、許文化 (2005)，正方體的平面截面，載於《科學研習月刊 第 44 卷第 6 期》，4–15 頁，臺灣：國立臺灣科學教育館。
4. 黃子富 (2002)，正方體、六聯方形與空間探究，載於鄭振初、梁易天(編)，《小學數學教學交流集「數有心得」》，42–60 頁，香港：香港教育專業人員協會。
5. 孫文先(1998)，《七巧遊戲》，台灣：九章出版社。
6. S.P. Kwan, K.L. Cheung (2009). *The van Hiele Phases of Learning in studying Cube Dissection*. Retrieved 23 Nov 2009, from [http://math.unipa.it/~grim/21\\_project/Kwan358-363.pdf](http://math.unipa.it/~grim/21_project/Kwan358-363.pdf).

## 誌謝

感謝兩年來和我們一起進行嘗試教學的學生。於教的過程中，我們從他們的身上也學會不少。

附錄

### 齊來破奇案

一天，一個劫匪銀行打劫。警訊播出後，有三個目擊證人出現。

目擊證人甲說：「我只看到劫匪拿着一個正方體的箱子，但看不到他的樣子。」

警察問：「你看到箱子的圖案嗎？」

目擊證人甲說：「看到，是這樣的。」



目擊證人乙說：「我看不到他的樣子，但看到劫匪一個尖尖的箱子。是這樣的。」



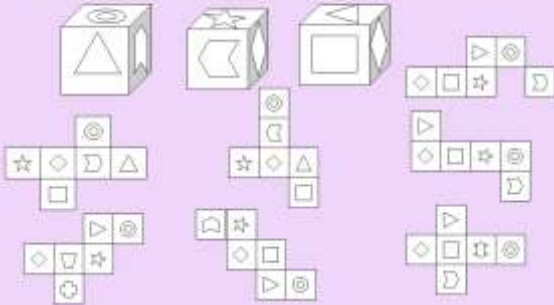
目擊證人丙說：「我看到劫匪有鬍鬚的，拿着一個正方形的物體。是這樣的。」



聽完三個目擊證人說的話，警方仍毫無頭緒。有警察說三個目擊證人說的話不可信，你認為對嗎？

警察把目擊證人的證供交給上司時，上司立即說：「你已有足夠的資料，為何還不趕快去拘捕劫匪。」警察啞口無言，不知所措，你知道為何上司這樣說嗎？

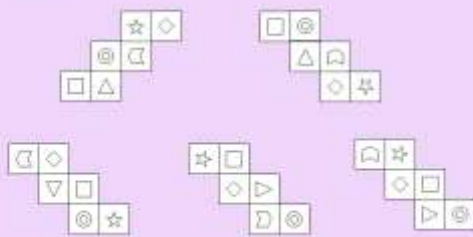
警察上街找尋疑犯，但看見滿街都是由六個正方形拼合的摺紙圖樣，你能分辨誰是劫匪嗎？有較快捷的方法嗎？



警察把可以摺成正方體的摺紙圖樣抽出來，但是有三張，且上面亦有目擊證人所說的圖案。你能協助警察，把劫匪繩之以法嗎？



劫匪很狡猾，當警察找出答案的同時，他又變身了，你能畫出他會變成的模樣嗎？是否只有一種？



**作者**

羅家欣

香港教育學院 學位教師教育文憑（小學）課程

[amandalo04@yahoo.com.hk](mailto:amandalo04@yahoo.com.hk)

關樹培

香港教育學院 數學與資訊科技學系

[spkwan@ied.edu.hk](mailto:spkwan@ied.edu.hk)