



2021-2022

「有效的觀課與評課 - 以學校為本位」  
小組匯報

中學數學科



# 課堂學習研究的理論架構

強調三個不同層面的「變易 (Variation)」

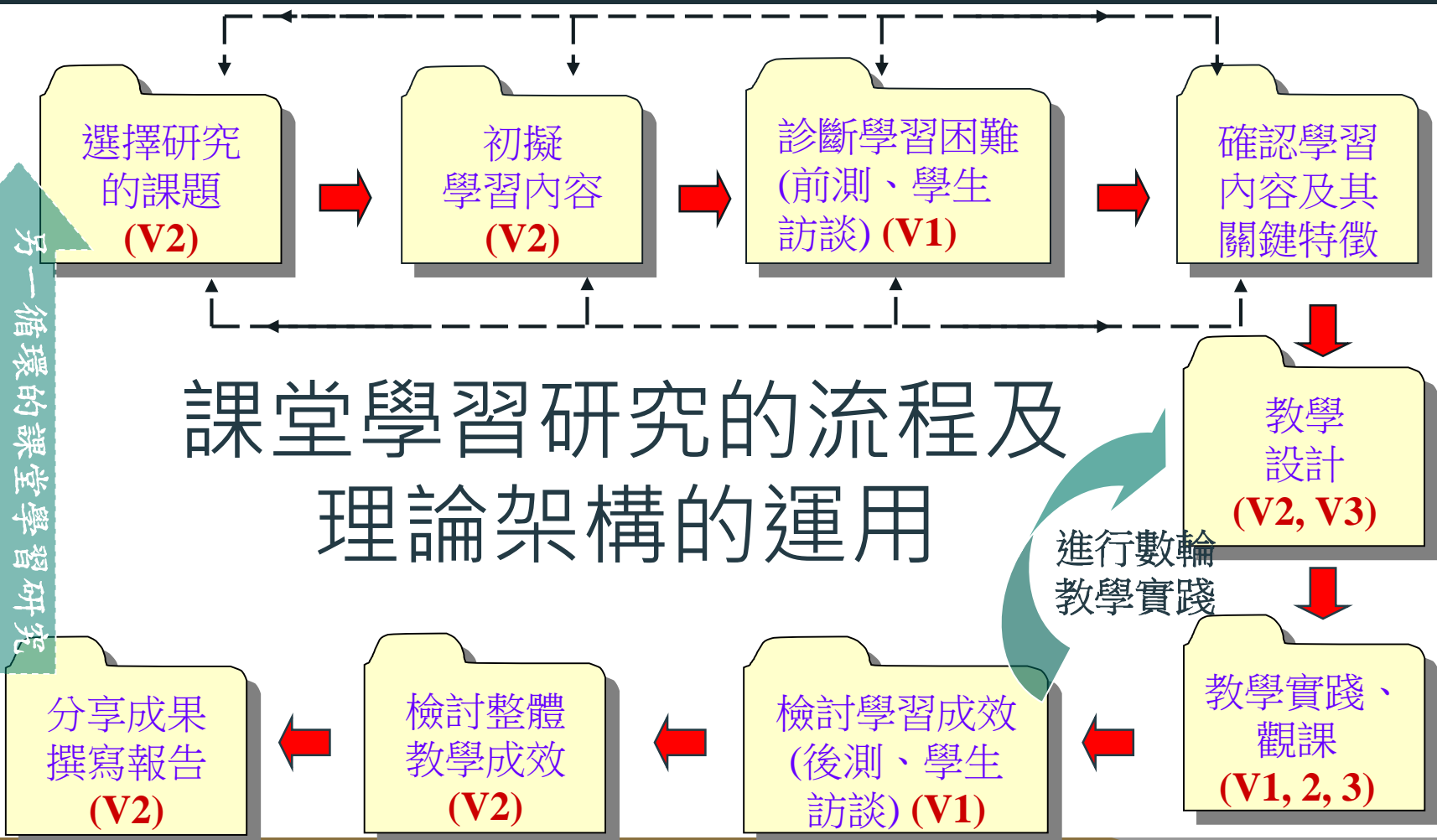
V1: 學生對所學事物的不同見解

V2: 教師對何謂適切學習內容的不同見解及處理方式

V3: 利用「變易圖式」作為指導教學設計的工具

# 課堂學習研究的流程及 理論架構的運用


另一循環的課堂學習研究





# 研究課 ≠ 模範課

此乃研究員與老師的研究及教學成果  
雖非完美但可作為教學的分享與討論



選擇研究  
的課題  
(V2)

## 課題：整數指數定律 (中二及中三級)

課題是否值得研究？

高中的課題如「指數及對數函數」、「等比數列」等都會涉及指數運算

螞蟻的數量以  $N(t) = \frac{A}{1 + 4(3)^{-\lambda t}}$  表示， $A$  及  $\lambda$  為常數， $t$  為週數。若最初的螞蟻數

目為 20 000 隻，4 週後增加至 50 000 隻，

a) 求  $A$  及  $\lambda$ ，答案準確至 1 位有效數字。

\*b) 經過長時間後，求螞蟻的數量。

聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 ( $\text{w/m}^2$ ) 來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為  $I_0 = 10^{-12}$  ( $\text{w/m}^2$ )。當測得的聲音強度為  $I$  ( $\text{w/m}^2$ ) 時，所產生的噪音分貝數  $d$  為

$$d(I) = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}。$$

某人拉小提琴時所測得的聲音強度為  $10^{-3}$  ( $\text{w/m}^2$ )，問此人產生的噪音為\_\_\_\_\_分貝。

選擇研究  
的課題  
(V2)

## 課題：整數指數定律 (中二及中三級)

課題是否值得研究？

2022 DSE 卷一



1. 化簡  $\frac{(a^3b^{-2})^4}{a^{-5}b^6}$ ，並以正指數表示答案。

2021 DSE 卷一



1. 化簡  $(\alpha\beta^3)(\alpha^{-2}\beta^4)^5$ ，並以正指數表示答案。

2020 DSE 卷一



1. 化簡  $\frac{(mn^{-2})^5}{m^{-4}}$ ，並以正指數表示答案。

2018 DSE 卷一



2. 化簡  $\frac{xy^7}{(x^{-2}y^3)^4}$ ，並以正指數表示答案。

2017 DSE 卷一



2. 化簡  $\frac{(m^4n^{-1})^3}{(m^{-2})^5}$ ，並以正指數表示答案。

選擇研究  
的課題  
(V2)

## 課題：整數指數定律 (中二及中三級)

期望學生在這課題學到什麼？

將整數指數律應用到零及負整數指數的題目

$$\frac{x^{-5}y^2}{x^3y^{-2}} = x^{-5-3}y^{2-(-2)} = x^{-8}y^4 = \frac{y^4}{x^8}$$

選擇研究  
的課題  
(V2)



初擬  
學習內容  
(V2)

## 課題：整數指數定律 (中二及中三級)

初擬學習內容：

運用整數指數定律處理混合題

初擬關鍵特徵：

CF1 零指數的意義及運算方式

CF2 負指數的意義及運算方式

$$\frac{x^{-5}y^2}{x^3y^{-2}} = x^{-5-3}y^{2-(-2)} = x^{-8}y^4 = \frac{y^4}{x^8}$$

$$a^x \div a^x = a^{x-x} = a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{a^{-1}}{a^2} = a^{-1-2} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$



選擇研究的  
課題  
(V2)



初擬  
學習內容  
(V2)



診斷學習困難  
(前測、學生  
訪談) (V1)

課題：整數指數定律 (中二及中三級)

學生的已有知識是什麼？

指數定律：

$$(1) \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(2) \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

選擇研究的  
課題  
(V2)



初擬  
學習內容  
(V2)



診斷學習困難  
(前測、學生  
訪談) (V1)

## 課題：整數指數定律 (中二及中三級)

學生的學習難點是什麼？

- 學生未能理解  $a^0 = 1$  及負指數的意義
- 學生未能理解負號在正整數指數中不同位置的意義，

例如： $-3^4, (-3)^4, 3^{-4}$

- 學生錯誤理解負指數為負數值

$$a^{-2} = -\frac{1}{a^2}$$

- 學生未能簡化  $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$  的值

選擇研究的  
課題  
(V2)



初擬  
學習內容  
(V2)



診斷學習困難  
(前測、學生  
訪談) (V1)

# 前測設計

化簡下列各題，並以正指數表示答案。(或圈出適當的答案)。

第一部份。

1.  $a^2 \times a^3 =$

A.  $5a$

B.  $6a$

C.  $a^5$

D.  $a^6$

2.  $y^{10} \div y^2 =$

A.  $y^3$

B.  $y^8$

C.  $y^{12}$

D.  $y^{20}$

3.  $a^4 \div a^4 =$

A.  $0$

B.  $1$

C.  $a^8$

D.  $4a$

4.  $ab \times a^3b^4 =$   $(a^4b^5)$

5.  $\frac{y^6}{y^3} =$   $(y^3)$

選擇  
的謬  
(V)

第二部份

6.  $p^2 \div p^7 =$

A.  $\frac{1}{p^5}$

B.  $p^5$

C.  $-p^5$

D.  $p^{-5}$

7.  $\frac{p}{p^5} =$   $(\frac{1}{p^4})$

8.  $a^{20} \div a^{20} =$   $(1)$

9.  $p \div p^{-4} =$   $(p^5)$

10.  $m^7 \times m^0 =$   $(m^7)$

11.  $m^8 \times m^{-3} =$   $(m^5)$

12.  $y^2 \times y^2 \div y^4 =$   $(1)$

13.  $\frac{x^3 y^5}{x^2 y^4} =$   $(xy)$

14.  $n^4 \times n^{-3} \times n^0 =$   $(n)$

15.  $m^3 \times m^{-7} \div m^0 =$   $(\frac{1}{m^4})$

16.  $** \frac{x^{-5} y^2}{x^3 y^{-2}} =$   $(\frac{y^4}{x^8})$

# 前測設計

選擇研究  
的課題  
(V2)



初擬  
學習內容  
(V2)



診斷學習困難  
(前測、學生  
訪談) (V1)

## 先導測試及結果

- 對象：中四級，高中低能力，共四位學生
- 透過訪談了解同學的解題方法，反思選擇題的選項設計，作出修訂。
- 問題數量足夠，從學生的答案中可觀察到是「猜對」還是「答對」。

選擇研究的  
課題  
(V2)



初擬  
學習內容  
(V2)



診斷學習困難  
(前測、學生  
訪談) (V1)

## 確認前測設計

題目內容	測試目標 (如已有知識、關鍵特徵、知識轉移)
1 – 4 (共4分)	已有知識
5 – 12 (共8分)	關鍵特徵 (CF1: 5, 8, 10, 12) (CF2: 6, 7, 9, 11)
13 – 16 (共6分)	知識轉移、混合題型

選擇研究的  
課題  
(V2)



初擬  
學習內容  
(V2)



診斷學習困難  
(前測、學生  
訪談) (V1)



確認學習  
內容及其  
關鍵特徵

## 確認關鍵特徵：

學習內容：

運用整數指數定律處理混合題

關鍵特徵：

CF1 零指數的意義及運算方式

CF2 負指數的意義及運算方式

教學策略：先用指數定律處理，最後再將負指數轉成正指數答案

（此課堂為起步階段，會避免較複雜的運算題型，因此先以學生最為熟悉的指數定律為基礎作解題）

選擇研究的  
課題  
(V2)



初擬  
學習內容  
(V2)



診斷學習困難  
(前測、學生  
訪談) (V1)



確認學習  
內容及其  
關鍵特徵



教學  
設計  
(V2, V3)

V2: 教師對何謂適切學習內容的不同見解及處理方式

V3: 利用「變易圖式」作為指導教學設計的工具



# 變易圖式（對照 contrast）


$$a^3 \div a^2 = a^{3-2} = a^1 = a$$

VS

$$a^3 \div a^2 = \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \times a \times a}{a \times a} = a$$

教學環節	審辨的關鍵特徵	變	不變
重溫已有知識	$a^3 \div a^2 = \frac{a^3}{a^2}$ (回應學生的常犯錯誤)	計算方法 指數定律VS代數分數	數值

# 變易圖式（對照 contrast）

$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1$$

$$a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$$

教學環節	審辨的關鍵特徵	變	不變
CF1零指數	$a^{3-3} \longleftrightarrow \frac{a^3}{a^3}$	計算方法 指數定律VS代數分數	數值
CF1零指數	$\frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} \longleftrightarrow a^0$	計算方法 指數定律VS代數分數	數值

# 變易圖式（區分 separation）

$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1$$

$$a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$$

$$2^3 \div 2^3 = \frac{2^3}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{8}{8} = 1 \quad (\text{如果 } a = 2)$$

教學環節	審辨的關鍵特徵	變	不變
CF1零指數	$a^0 = 1$ (零指數的意義)	同一題目的計算方法 指數定律 VS 代數分數&數字分數	答案

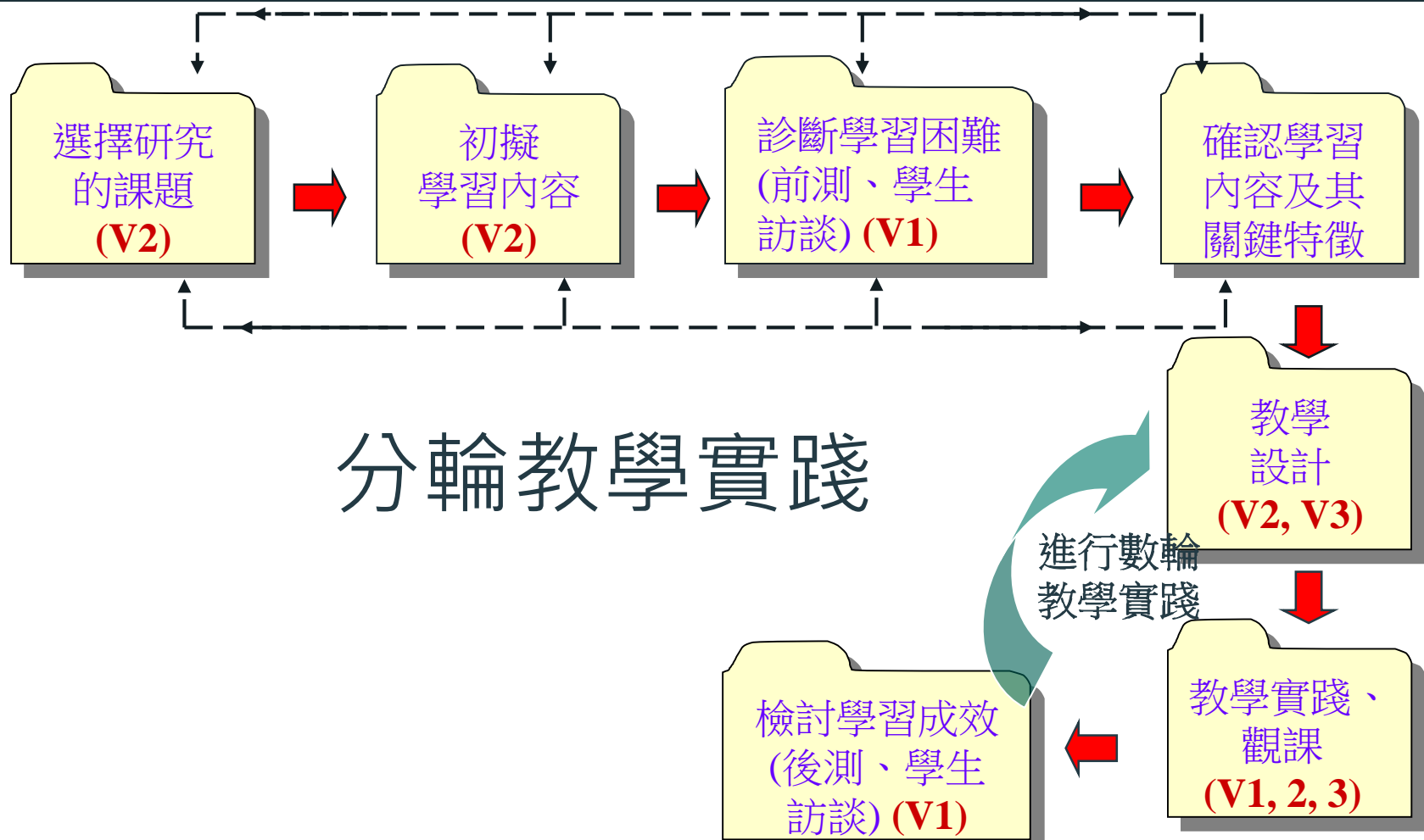
# 變易圖式（區分 separation）

$$a^3 \div a^4 = a^{3-4} = a^{-1}$$

$$a^3 \div a^4 = \frac{a^3}{a^4} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$2^3 \div 2^4 = \frac{2^3}{2^4} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad (\text{如果 } a = 2)$$

教學環節	審辨的關鍵特徵	變	不變
CF2負指數	$\frac{1}{a} = a^{-1}$ (負指數的意義)	計算方法 指數定律VS數字分數	答案



第一輪		第二輪		第三輪	
<ul style="list-style-type: none"> <li>學生能力稍遜</li> <li>課堂時間較充裕</li> <li>初中課堂以小組形式為主，因此設計探索活動讓同學在課堂上進行討論</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>學生能力較高</li> <li>課堂時間較緊迫</li> <li>學生自習能力高，在課堂上可更集中處理計算上的教學難點</li> </ul>			
預習 (重溫已有知識) CF1活動 + 練習 CF2活動 + 練習 混合題練習		增加項目： 筆記欄及強調步驟的例題 刪減部份： 題目數量，更對焦		將CF1及CF2的活動改為預習功課，課堂上更對焦計算及解決難點	



# 第一輪教學實踐



# 課前預習

(ii) 化簡下列各題：

1.  $a \times a \times a$

$$= a^3$$

3.  $a^2 \times a^3$

$$= a^{2+3}$$

$$= a^5 //$$

5.  $a^4 \times a^6$

$$= a^{4+6}$$

$$= a^{10} //$$

2.  $b \times b \times b \times b$

$$= b^4 //$$

4.  $b^3 \times b^4$

$$= b^{3+4}$$

$$= b^7 //$$

6.  $m^3 \times m^6$

$$= m^{3+6}$$

$$= m^9 //$$

(iv) 化簡下列各題：

1.  $b^7 \div b^5$

$$= b^{7-5}$$

$$= b^2 //$$

3.  $a^{13} \div a^y$

$$= a^{13-y} //$$

$$\frac{b \times b \times b \times b \times b \times b \times b}{b \times b \times b \times b \times b}$$

2.  $b^9 \div b^2$

$$= b^{9-2}$$

$$= b^7 //$$

4.  $b^x \div b^{24}$

$$= b^{x-24} //$$



# 引入

透過變易圖式（對照 contrast），讓學生重溫指數相減的已有知識。

1. 化簡下列各題。

(a)  $a^4 \times a^2$

$$\begin{aligned} a^4 \times a^2 &= a^{4+2} \\ &= a^6 \end{aligned}$$

$$\because a^4 = a \times a \times a \times a$$

$$\text{及 } a^2 = a \times a$$

$$\begin{aligned} \therefore a^4 \times a^2 &= \underbrace{a \times a \times a \times a}_{\text{變}} \times \underbrace{a \times a}_{\text{不變}} \\ &= a^{4+2} \end{aligned}$$

2. 化簡下列各題。

(a)  $a^5 \div a^2$

$$\begin{aligned} a^5 \div a^2 &= a^{5-2} \\ &= a^3 \end{aligned}$$

$$\because a^5 = a \times a \times a \times a \times a$$

$$\text{及 } a^2 = a \times a$$

$$\therefore a^5 \div a^2 = \frac{a^5}{a^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a \times a \times a \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a}} \\ &= a^3 \end{aligned}$$

變	不變	審辨
計算方法 指數定律VS代數分數	數值	$a^5 \div a^2 = \frac{a^5}{a^2}$ (回應學生的常犯錯誤)。

# 引起動機

Quizizz

$$a^{12} \div a^2$$

1

$$a^{10}$$

2

$$a^6$$

3

$$6a$$

4

$$10a$$

- 網上即時互動
- 全班參與
- 抽問同學解釋答案，評估預習成果
- 更正學生對於「指數」的讀法

# 弓|起動機

## Quizizz

1.  $a^6 \times a^9 =$

Score responses

a $a^{15}$	13 Participants	62 %	<div></div>
b $a^{54}$	2 Participants	10 %	<div></div>
c $a^3$	0 Participants	0 %	<div></div>
d $15a$	1 Participant	5 %	<div></div>
! Unattempted	5 Participants	24 %	<div></div>

2.  $a^9 \times a^{10} =$

Score responses

a $a^{19}$	20 Participants	95 %	<div></div>
b $a^{90}$	0 Participants	0 %	<div></div>
c $19a$	0 Participants	0 %	<div></div>
	0 Participants	0 %	<div></div>
	1 Participant	5 %	<div></div>

3.  $a^{12} \div a^2$

Score responses

a $a^{10}$	19 Participants	90 %	<div></div>
b $a^6$	2 Participants	10 %	<div></div>
c $6a$	0 Participants	0 %	<div></div>
d $10a$	0 Participants	0 %	<div></div>

4.  $\frac{a^{14}}{a^5}$

Score responses

a $a^9$	18 Participants	86 %	<div></div>
b $a^{19}$	1 Participant	5 %	<div></div>
c $\frac{1}{a^9}$	2 Participants	10 %	<div></div>
d $9a$	0 Participants	0 %	<div></div>

# CF1活動

區分 separation

活動一：零指數的概念（ $a^0$ 是什麼？）

對照 contrast  
各題(a) (b) 的對照

與組員一起完成下列各題。

例一(a)  $\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} =$   $a^0$

(b)  $\frac{a}{a} =$  1

例二(a)  $\frac{2}{2} = \frac{2^1}{2^1} = 2^{1-1} =$   $2^0$

(b)  $\frac{2}{2} =$  1

1. (a)  $\frac{m^3}{m^3} = m^{(3)-(3)} =$   $m^0$

(b)  $\frac{m^3}{m^3} = \frac{m \times m \times m}{m \times m \times m} =$  1

2. (a)  $\frac{n^5}{n^5} = n^{(5)-(5)} =$   $n^0$

(b)  $\frac{n^5}{n^5} = \frac{n \times n \times n \times n \times n}{n \times n \times n \times n \times n} =$  1

3. (a)  $\frac{p^8}{p^8} = p^{(8)-(8)} =$   $p^0$

(b)  $\frac{p^8}{p^8} =$  1

對於  $a \neq 0$ ,  $a^0 =$  1

類合 Generalization

# CF1活動

學生作品

活動一：零指數的概念 ( $a^0$  是什麼?)

與組員一起完成下列各題。

例一(a)  $\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} =$

$a^0$

(b)  $\frac{a^1}{a^1} =$

$1$

例二(a)  $\frac{2}{2} = \frac{2^1}{2^1} = 2^{1-1} =$

$2^0$

(b)  $\frac{2}{2} =$

$1$

1. (a)  $\frac{m^3}{m^3} = m^{(3)-(3)} =$

$m^0$

(b)  $\frac{m^3}{m^3} = \frac{m \times m \times m}{m \times m \times m} =$

$1$

2. (a)  $\frac{n^5}{n^5} = n^{(5)-(5)} =$

$n^0$

(b)  $\frac{n^5}{n^5} = \frac{\cancel{n} \times \cancel{n} \times \cancel{n} \times \cancel{n} \times \cancel{n}}{\cancel{n} \times \cancel{n} \times \cancel{n} \times \cancel{n} \times \cancel{n}} =$

$1$

3. (a)  $\frac{p^8}{p^8} = p^{(8)-(8)} =$

$p^0$

(b)  $\frac{p^8}{p^8} =$

$1$

對於  $a \neq 0$ ,  $a^0 = 1$

# CF1練習

3. 化簡下列各題。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad a^0 \\ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad a^6 \div a^6 \\ = a^{6-6} \\ = a^0 \\ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \frac{a^3}{a^3} \\ = a^{3-3} \\ = a^0 \\ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad a \times a^5 \times a^0 \\ = a^{1+5+0} \\ = a^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad c^2 \times c^5 \times b^0 \\ = c^{2+5} \times 1 \\ = c^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad \frac{a^5 b^4}{a^3 b^0} \\ = a^{5-3} b^{4-0} \\ = a^2 b^4 \end{aligned}$$

# CF2活動

對照 contrast  
各題(a) (b) 的對照

區分 separation

類合 Generalization

與組員一起完成下列各題。

例一(a)  $\frac{a}{a^2} = a^{1-2} = a^{(-1)}$

(b)  $\frac{a}{a^2} = \frac{a}{a \times a} = \frac{1}{a}$

例二(a)  $\frac{2}{2^2} = 2^{1-2} = 2^{(-1)}$

(b)  $\frac{2}{2^2} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

1. (a)  $\frac{a^2}{a^4} = a^{(2)-(4)} = a^{-2}$

(b)  $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^2}$

2. (a)  $\frac{t^2}{t^5} = t^{(2)-(5)} = t^{-3}$

(b)  $\frac{t^2}{t^5} = \frac{t \times t}{t \times t \times t \times t \times t} = \frac{1}{t^3}$

3. (a)  $\frac{p^3}{p^7} = p^{(3)-(7)} = p^{-4}$

(b)  $\frac{p^3}{p^7} = \frac{1}{p^4}$

4. (a)  $\frac{m^3}{m^8} = m^{(3)-(8)} = m^{-5}$

(b)  $\frac{m^3}{m^8} = \frac{1}{m^5}$

根據以上題目，完成下列各題，以正指數表示答案。

5. (a)  $2^{-1} = \frac{1}{2}$

(b)  $a^{-1} = \frac{1}{a}$

(c)  $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

(d)  $t^{-3} = \frac{1}{t^3}$

(b)  $p^{-4} = \frac{1}{p^4}$

(c)  $m^{-5} = \frac{1}{m^5}$

對於  $a \neq 0$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

# CF2活動

學生作品

與組員一起完成下列各題。

例一(a)  $\frac{a}{a^2} = a^{1-2} =$   $a^{-1}$  (b)  $\frac{a}{a^2} = \frac{a}{a \times a} =$   $\frac{1}{a}$

例二(a)  $\frac{2}{2^2} = 2^{1-2} =$   $2^{-1}$  (b)  $\frac{2}{2^2} = \frac{2}{2 \times 2} =$   $\frac{1}{2}$

1. (a)  $\frac{a^2}{a^4} = a^{(2)-(4)} =$   $a^{-2}$  (b)  $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \times a^1}{a \times a \times a \times a} =$   $\frac{\cancel{2}}{\cancel{a}} \frac{1}{a^2}$

2. (a)  $\frac{t^2}{t^5} = t^{(2)-(5)} =$   $t^{-3}$  (b)  $\frac{t^2}{t^5} = \frac{t \times t^1}{t \times t \times t \times t \times t} =$   $\frac{\cancel{2}}{\cancel{t}} \frac{1}{t^3}$

3. (a)  $\frac{p^3}{p^7} = p^{(3)-(7)} =$   $p^{-4}$  (b)  $\frac{p^3}{p^7} =$   $\frac{\cancel{4}}{\cancel{p}} \frac{1}{p^4}$

4. (a)  $\frac{m^3}{m^8} = m^{(3)-(8)} =$   $m^{-5}$  (b)  $\frac{m^3}{m^8} =$   $\frac{\cancel{5}}{\cancel{m}} \frac{1}{m^5}$



# CF2活動

學生作品

與組員一起完成下列各題。

例一(a)  $\frac{a}{a^2} = a^{1-2} = a^{-1}$  (b)  $\frac{a}{a^2} = \frac{a}{a \times a} = \frac{1}{a}$

例二(a)  $\frac{2}{2^2} = 2^{1-2} = 2^{-1}$  (b)  $\frac{2}{2^2} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$

1. (a)  $\frac{a^2}{a^4} = a^{(2)-(4)} = a^{-2}$  (b)  $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^2}$

(b)  $\frac{t^2}{t^5} = \frac{t \times t}{t \times t \times t \times t \times t} = \frac{1}{t^3}$

(b)  $\frac{p^3}{p^7} = \frac{1}{p^4}$

(b)  $\frac{m^3}{m^8} = \frac{1}{m^5}$

根據以上題目，完成下列各題，以正指數表示答案。

5. (a)  $2^{-1} = \frac{1}{2}$

(b)  $a^{-1} = \frac{1}{a}$

(c)  $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

(d)  $t^{-3} = \frac{1}{t^3}$

(b)  $p^{-4} = \frac{1}{p^4}$

(c)  $m^{-5} = \frac{1}{m^5}$

對於  $a \neq 0$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

# CF2練習

4. 化簡下列各題，以正指數表示答案。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad a^{-4} \\ = \frac{1}{a^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad a^{-6} \times a^3 \\ = a^{-6+3} \\ = a^{-3} \\ = \frac{1}{a^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad t^{-3} \times t^2 \\ = t^{-3+2} \\ = t^{-1} \\ = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad c^{-2} \times c^{-5} \times c^{-3} \\ = c^{-2+(-5)+(-3)} \\ = c^{-10} \\ = \frac{1}{c^{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad p^4 \times p^{-6} \div p \\ = p^{4+(-6)-1} \\ = p^{-3} \\ = \frac{1}{p^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)*} \quad m^{-5} \times m^2 \div m^{-3} \\ = m^{-5+2-(-3)} \\ = m^0 \\ = 1 \end{aligned}$$

# CF2練習

4. 化簡下列各題，以正指數表示答案。

(a)  $a^{-4}$

(b)  $a^{-6} \times a^3$

(c)  $t^{-3} \times t^2$

$$= a^{-6+3}$$

$$= a^{-3}$$

$$= t^{-3+2}$$

$$= t^{-1}$$

$$= \frac{1}{t}$$

(d)  $c^{-2} \times c^{-5} \times c^{-3}$

$$= c^{-2+(-5)+(-3)}$$

$$= c^{-10}$$

$$= \frac{1}{c^{10}}$$

(e)  $p^4 \times p^{-6} \div p$

$$= p^{4+(-6)-1}$$

$$= p^{-3}$$

$$= \frac{1}{p^3}$$

(f)\*  $m^{-5} \times m^2 \div m^{-3}$

$$= m^{-5+2-(-3)}$$

$$= m^0$$

$$= 1$$

已差不多超時，因此只做了題(e)。  
(OL混合題)

# OL混合題



「指數相減」的概念不清

負指數處理不當

步驟不完整

指數位置不正確

未有列出步驟

$$\begin{aligned}
 (k)^* \quad & \frac{m^2 n^{-2}}{m^{-7} n^3} \\
 &= m^{2-(-7)} n^{-2-3} \\
 &= m^{2+7} n^{-5} \\
 &= m^9 n^{-5} \\
 &= \frac{m^9}{n^5}
 \end{aligned}$$

# 學生後測表現

$$10. m^7 \times m^0 = m^7$$

$$11. m^8 \times m^{-3} = m^{-11}$$

$$12. y^2 \times y^2 \div y^4 = y^4 \div y^4 = 1$$

$$13. \frac{x^3 y^5}{x^2 y^4} = x^{3-2} y^{5-4} = x^1 y^1$$

$$14. n^4 \times n^{-3} \times n^0 = n^{4+(-3)+0} = n^{-12} = \frac{1}{n^{12}}$$

$$15. m^3 \times m^{-7} \div m^0 = m^{3+(-7)-0} = m^{-4} = \frac{1}{m^4}$$

$$14. n^4 \times n^{-3} \times n^0 = n^{4+(-3)+0} = n^{-12} = \frac{1}{n^{12}}$$

$$15. m^3 \times m^{-7} \div m^0 = m^{3+(-7)-0} = m^{-4} = \frac{1}{m^4}$$

難點：有向數加減

$$9. p \div p^{-4} = p^{1-(-4)} = p^{-3} = \frac{1}{p^3}$$

# 學生後測表現

$$10. m^7 \times m^0 = m^7$$

$$11. m^8 \times m^{-3} = m^{-11}$$

$$12. y^2 \times y^2 \div y^4 = y^4 \div y^4 = 1$$

$$13. \frac{x^3 y^5}{x^2 y^4} = x^{3-2} y^{5-4} = x^1 y^1$$

$$14. n^4 \times n^{-3} \times n^0 = n^{4+(-3)+0} = n^{-1} = \frac{1}{n^1}$$

$$15. m^3 \times m^{-7} \div m^0 = m^{3+(-7)-0} = m^{-4} = \frac{1}{m^4}$$

$$14. n^4 \times n^{-3} \times n^0 = n^{4+(-3)+0}$$

$$= n^{-1}$$

$$= \frac{1}{n^1}$$

$$15. m^3 \times m^{-7} \div m^0 = m^{3+(-7)-0}$$

$$= m^{-4}$$

$$= \frac{1}{m^4}$$

難點：有向數加減

\*\*宜提醒同學用計算機\*\*

$$9. p \div p^{-4} = p^{1-(-4)} = p^{-3} = \frac{1}{p^3}$$

# 學生後測表現

$$9. p \div p^{-4} = \frac{1}{p^4}$$

$$9. p^1 \div p^{-4} = p^{-3} = \frac{1}{p^3}$$

$$9. p \div p^{-4} = p^{-4}$$

$$9. p \div p^{-4} = p^3$$

$$9. p \div p^{-4} = \frac{1}{p^{-4}}$$

$$9. p \div p^{-4} = p^4$$

$$9. p \div p^{-4} = \frac{1}{p^0}$$

$$9. p \div p^{-4} = \frac{1}{p^5}$$

$$9. p \div p^{-4} = p^{-5} = \frac{1}{p^5}$$

#9 最差的題目

(前測2人答對，後測1人答對)

共通點：

沒有步驟

即使錯也不知道錯在哪一步

# 學生後測表現

$$9. p \div p^{-4} = \frac{1}{p^4}$$

$$9. p^1 \div p^{-4} = p^{-3} = \frac{1}{p^3}$$

$$9. p \div p^{-4} = p^{-4}$$

$$9. p \div p^{-4} = p^3$$

$$9. p \div p^{-4} = \frac{1}{p^{-4}}$$

$$9. p \div p^{-4} = p^4$$

$$9. p \div p^{-4} = \frac{1}{p^0}$$

$$9. p \div p^{-4} = \frac{1}{p^5}$$

$$9. p \div p^{-4} = p^{-5} = \frac{1}{p^5}$$

#9 最差的題目

(前測2人答對，後測1人答對)

共通點：

沒有步驟

即使錯也不知道錯在哪一步

**\*\*宜強調需列出步驟\*\***



# 檢討：新增筆記欄及例題

筆記欄：指數定律

若  $m$  及  $n$  均為整數，且  $a \neq 0$ ，則可得：

1.  $a^m \times a^n =$

2.  $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} =$

3.  $a^0 =$

4.  $a^{-n} =$

例題：

$$\begin{aligned} & \frac{m^{-6} \times m^2}{m^3} \\ &= m^{-6+2-3} \quad \leftarrow \text{必須利用指數定律列出步驟} \\ &= m^{-7} \\ &= \frac{1}{m^7} \quad \leftarrow \text{在最後一步應用 } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{aligned}$$

強調步驟

# 檢討：OL混合題

- 刪減了部份題目  
(包括CF1/CF2)
- 更能針對OL
- 強調需「列出步驟」

混合題：

5. 化簡下列各數式，並以正指數表示答案。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{m^{-2} \times m^6}{m^7} \\ &= m^{-2+6-7} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{m^{-5} \times m^{10}}{m^2}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \frac{m^{-3}n^6}{m^6n^3} \\ &= m^{(\quad)}n^{(\quad)} \end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad \frac{m^4n^{-5}}{m^3n^3}$$

$$\text{(e)} \quad \frac{m^2n^{-2}}{m^{-7}n^3}$$

$$\text{(f)} \quad \frac{m^{-4}n^2}{m^{-6}n^8}$$




# 第二輪教學實踐




## 經第一輪教學後所作出的修訂


- 學生大致能掌握CF1(零指數)，在活動一中刪減題目數量及有關練習數量。
- 學生未能掌握CF2(負指數)，在活動二中保留一定數量的題目，老師講解如何將負指數轉換成正指數的方法。
- 在計算混合題前加上筆記欄及例子，重溫指數定律及強調在計算過程中步驟的重要性。



老師講解  
 $2^0$ 與 2  
的分別



在計算混合題  
前加上筆記欄  
及講解例子，  
強調步驟的重  
要性。



# OL混合題

a pleasure!

全部有列出步驟

指數法則

$$1). a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$2). a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n}$$

$$3). a^0 = 1$$

$$4). a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

d.  $\frac{m^4 n^{-5}}{m^3 n^3}$  ①, ④ ✓

$$= m^{4-3} n^{-5-3} \checkmark$$

$$= m^1 n^{-8} \checkmark$$

$$= \frac{m}{n^8} \checkmark$$

e.  $\frac{m^2 n^{-2}}{m^{-7} n^3}$  ②, ⑤ ✓

$$= m^{2-(-7)} n^{-2-3} \checkmark$$

$$= m^9 n^{-5} \checkmark$$

$$= m^9 \times \frac{1}{n^5} \checkmark$$

$$= \frac{m^9}{n^5} \checkmark$$

f.  $\frac{m^{-4} n^2}{m^{-6} n^8}$  ③, ⑥ ✓

$$= m^{-4-(-6)} n^{2-8} \checkmark$$

$$= m^2 n^{-6} \checkmark$$

$$= m^2 \times \frac{1}{n^6} \checkmark$$

$$= \frac{m^2}{n^6} \checkmark$$

能應用  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  以正指數表示答案



# 第三輪教學實踐





# 修訂教材成為預習工具

- 自主學習 – 讓學生在家有足夠時間發掘及提升思維
- 善用課時 – 將課堂焦點放在混合題的學習難點

# Review of Laws of indices

$$1. a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$2. a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Warm-up Exercise - Simplify the following expressions **by using laws of indices.**

$$1. a \times a^3 \times a^5$$

$$= a^{( \quad + \quad + \quad )}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2. \frac{a^3 \times a^4}{a^5}$$

$$= a^{( \quad + \quad - \quad )}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3. \frac{a^2 b^4}{ab}$$

$$= a^{( \quad )} b^{( \quad )}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

Complete the following questions. Observe and compare (a) and (b) in each question.

(Question 1 is done for you as an example)

$$1. (a) \frac{p}{p} = \frac{p^1}{p^1} = p^{1-1} = p^0 \quad (b) \frac{p}{p} = \frac{p^1}{p^1} = 1$$

$$\therefore p^0 = 1$$

$$2. (a) \frac{2}{2} = \frac{2^1}{2^1} = 2^{1-1} = 2^{( \quad )} \quad (b) \frac{2}{2} =$$

$$\therefore 2^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3. (a) \frac{m^3}{m^3} = m^{( \quad )} = m^{( \quad )} \quad (b) \frac{m^3}{m^3} = \frac{m \times m \times m}{m \times m \times m} =$$

$$\therefore m^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4. (a) \frac{n^5}{n^5} = n^{( \quad )} = n^{( \quad )} \quad (b) \frac{n^5}{n^5} = \frac{n \times n \times n \times n \times n}{n \times n \times n \times n \times n} =$$

$$\therefore n^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

In general,

$$\text{For } a \neq 0, a^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1. (a) \frac{a}{a^2} = a^{1-2} = a^{-1} \quad (b) \frac{a}{a^2} = \frac{a}{a \times a} = \frac{a^1}{a^1 \times a} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$2. (a) \frac{2}{2^2} = 2^{1-2} = 2^{( \quad )} \quad (b) \frac{2}{2^2} = \frac{2}{2 \times 2} =$$

$$\therefore 2^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3. (a) \frac{a^2}{a^4} = a^{( \quad )} = a^{( \quad )} \quad (b) \frac{a^2}{a^4} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a} =$$

$$\therefore a^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4. (a) \frac{m^2}{m^5} = m^{( \quad )} = m^{( \quad )} \quad (b) \frac{m^2}{m^5} = \frac{m \times m}{m \times m \times m \times m \times m} =$$

$$\therefore m^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

In general,

$$\text{For } a \neq 0, a^{-n} = \underline{\hspace{2cm}}$$

# 展示預習效果 (1'58)

如果多同學已  
掌握，只提問  
幾個重點，不  
花太多時間在  
這裡。

Review law of indices  
& Go through  $a^0 = 1$

# 展示預習效果 (2'53)

如果部份同學  
不掌握，透過  
展示錯誤答案  
及同儕討論處  
理預習帶來的  
不步伐。

Go through

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

## 改善建議

- 學生在預習中掌握  $a^0$  較理想
- 處理次方加減正負數則較多難點
- 下一輪教學則將重點放在CF2，亦優化教學材料的流程

# 研究課進一步改善建議

若果有第五輪教學...

- 讓學生有更多時間練習、討論和互評
- 若時間許可，可區分更多題目，甚至作分層練習
- 課堂上觀察到有學生能一題多解，可以讓學生討論不同方法的利弊

# 反思

## 教與學方面

- 數學教學常常都會出現變易圖式，如一題多解，或是透過反複計算/驗算來類合結果/定理
- 透過變易理論檢視以往建立的教材，昇華教學設計及提高對鋪排的意識
- 在不同學校也可實踐同一樣的教材基礎，只需按學生需要作調適
- 訪談的體驗 – 高中低能力學生的深入思考

# 反思

## 教師專業發展方面

- 透過相同及不同科目老師的意見，讓自己在該課題上更多靈感
- 學生和老師對觀課的觀感 (專業發展 VS 考核)
- 不同學校、文化、背景、能力的教學交流



# 反思

## 在校推行課堂學習研究方面

- 不同學校、文化、背景、能力的教學交流
- 同工的經驗分享、導師的專業意見都是十分十分可貴
- 即使是跨科也可以作專科交流，因課堂學習研究重視學習難點，跨科同事也許更能體會學生的學習難點

另一循環的課堂學習研究

